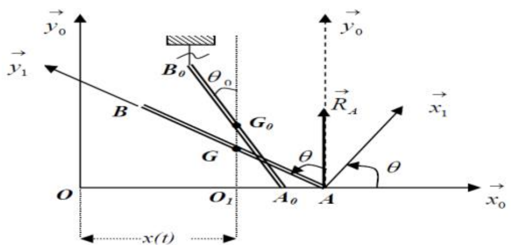
Exercice 1 :

Une barre homogène $\boldsymbol{AB = L}$, de masse $\boldsymbol{m}$ est attachée initialement par son extrémité $\boldsymbol{B_0}$ par un fil inextensible à un bâti fixe. L'autre extrémité $\boldsymbol{A_0}$ repose sur un sol parfaitement lisse. Soit θ_0 l'angle d'inclinaison initial de la barre avec l'axe vertical $(O_1, \vec{y}_0)$. A un instant $\boldsymbol{t}$ quelconque on coupe le fil et la barre tombe sans vitesse initiale. On considère que le mouvement se fait dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à la barre tel que $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$. On donne $\overrightarrow{OO_1} = x\,\vec{x}_0$ et le tenseur d'inertie de la barre en son centre d'inertie $\boldsymbol{G}$ dans le repère R_1 s'écrit : $I_{G/R_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1}$ avec $A = \dfrac{mL^2}{12}$

On prendra le repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme repère de projection.

1. Déterminer les vecteurs, position, vitesse, accélération absolue du point $\boldsymbol{G}$;
2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au point $\boldsymbol{G}$; En déduire que le centre $\boldsymbol{G}$ de la barre reste en mouvement vertical lors de sa chute ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au point $\boldsymbol{G}$;
4. En déduire l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de $L, \dot{\theta}, \theta$ et g .



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe et $R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est tel que : $\vec{\Omega}_1^0=\dot{\theta}\,\vec{z}_0=\dot{\theta}\,\vec{z}_1$

1. Vecteurs : position, vitesse et accélération absolue du point *G* ;

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1G}=x\,\vec{x}_0+\frac{L}{2}\cos\theta\,\vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{OG}=\underset{R_0}{\begin{cases} x \\ \frac{L}{2}\cos\theta \\ 0 \end{cases}} \Rightarrow \vec{V}^0(G)=\underset{R_0}{\begin{cases} \dot{x} \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases}}\ ; \qquad \vec{\gamma}^0(G)=\underset{R_0}{\begin{cases} \ddot{x} \\ -\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\ 0 \end{cases}}\ ;$$

2. Théorème de la résultante dynamique au point *G* ;

La résultante des forces extérieures appliquées à la barre est égale à la masse de la barre par l'accélération de son centre d'inertie. Le sol est lisse, alors la réaction au point A est suivant l'axe *(O, y)* donc normale au plan horizontal.

$$\vec{R}_A+\vec{P}=m\,\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$m\ddot{x}=0 \Leftrightarrow \ddot{x}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_{Ay}-P=-m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad \textbf{(3)}$$

La barre tombe sans vitesse initiale alors : $\dot{x}=0 \Rightarrow x=Cte$

Comme $x=Cte$ alors le centre d'inertie ***G*** de la barre tombe verticalement.

L'équation **(3)** s'écrit : $R_{Ay} = mg - m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$

3. Théorème du moment dynamique au point *G* ;

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{R}_A = \begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ R_{Ay} \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2}R_{Ay}\sin\theta \end{cases}_{R_0} = \frac{L}{2}R_{Ay}\sin\theta\,\vec{z}_0$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique au point ***G*** :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0\,\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \quad \text{or nous avons : } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0\,\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

En égalisant les deux expressions on obtient : $\frac{L}{2}R_{Ay}\sin\theta = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}$

$$R_{Ay} = \frac{mL}{6}\frac{\ddot{\theta}}{\sin\theta} \qquad \textbf{(5)}$$

4. Expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de $L, \dot{\theta}, \theta$ et g.

En remplaçant l'expression de R_{Ay} dans l'équation **(3)** on déduit l'équation différentielle décrivant la chute de la barre :

$$\frac{mL}{6}\frac{\ddot{\theta}}{\sin\theta} = mg - m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \Rightarrow \ddot{\theta}\left(\frac{mL}{6}\frac{1}{\sin\theta} + m\frac{L}{2}\sin\theta\right) = mg - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\text{d'où} \quad \ddot{\theta} = 3\frac{(2g - L\dot{\theta}^2\cos\theta)}{L(1+3\sin^2\theta)}\sin\theta$$

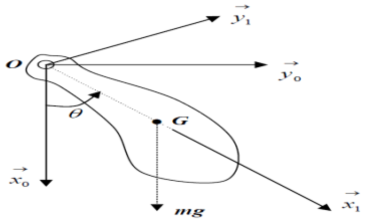
Exercice 2 :

Un pendule pesant constitué d'un solide homogène de forme quelconque, de masse ***m*** tourne autour d'un point fixe ***O*** lui appartenant. La liaison entre le solide et le bâti est de type cylindrique. Le pendule est lié au repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ en mouvement de rotation par rapport à un repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au bâti tel que : $(\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1) = \theta$

Le tenseur d'inertie du pendule en son centre d'inertie ***G*** dans le repère R_1 est égale à : I_G

On donne $\overrightarrow{OG} = L\vec{x}_1$ avec ***L= Cte*** ; R_1 est le repère de projection.

1. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement ;
2. Retrouver l'expression de cette équation en utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale ;
3. En déduire l'équation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe

$R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est tel que : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_1$

Vitesse et accélération du point G :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

1. Théorème de la résultante dynamique et du moment dynamique au point *G* ;

1.a. Théorème de la résultante dynamique au point *G* ;

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie. L'articulation au point O est cylindrique, la réaction a deux composantes dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$

$$\vec{R}_O + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$R_{Ox} + mg\cos\theta = -m\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_{Oy} - mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

1.b. Théorème du moment dynamique au point *G* ;

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{R}_O = \underset{R_0}{\begin{cases} -L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} R_{Ox} \\ R_{Oy} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -LR_{Oy} \end{cases}} = -LR_{Oy}\,\vec{z}_1$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique au point ***G*** :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}$$ or nous avons : $\vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_1^0 \Rightarrow \quad \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \dot{\theta}\, \vec{z}_1$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = I_G \ddot{\theta}\, \vec{z}_0$$

nous avons ainsi : $-LR_{Oy} = I_G \ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad R_{Oy} = -\frac{I_G \ddot{\theta}}{L}$ **(4)**

1.c. Equation différentielle du mouvement

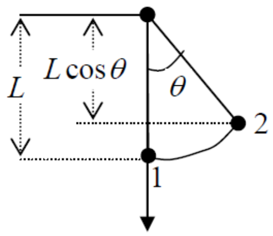
On remplace l'équation **(4)** dans l'équation **(3)**, on obtient : $-\frac{I_G \ddot{\theta}}{L} - mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta}\left(mL^2 + I_G\right) + mgL\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G}\sin\theta = 0$$

2. Equation différentielle en utilisant le théorème de conservation de l'énergie totale ;

L'énergie totale dans la position 1 est égale à l'énergie totale dans la position 2. : $E_1 = E_2$

$$E_1 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T} I_G.\vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_G.\dot{\theta}^2$$



$$E_2 = mg(L - L\cos\theta) = mgL(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_G.\dot{\theta}^2 = mgL(1-\cos\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}^2\left(mL^2 + I_G\right) = 2mgL(1-\cos\theta)$$

En dérivant les deux termes on obtient : $2\ddot{\theta}\dot{\theta}\left(mL^2 + I_G\right) = 2mgL\dot{\theta}\sin\theta$

$$\ddot{\theta}\left(mL^2 + I_G\right) - mgL\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G}\sin\theta = 0$$

3. Equation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.

Dans le cas d'un pendule simple $I_G = 0$, et s'il a de faibles oscillations alors : $\sin\theta \approx \theta$

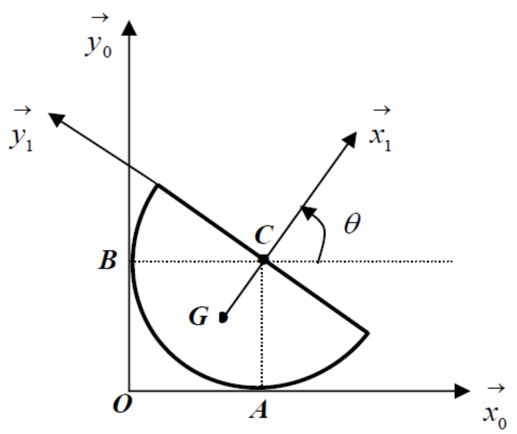
L'équation devient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

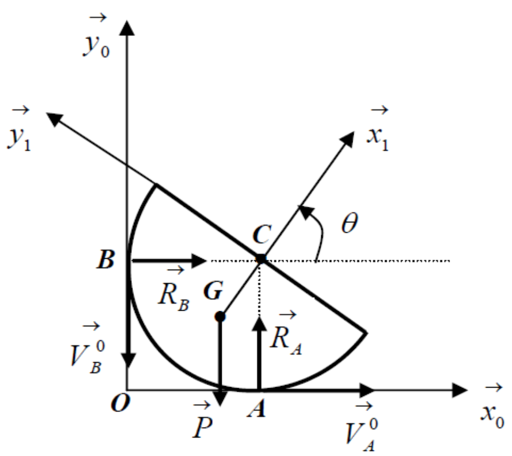
Exercice 3 :

Une demi sphère pleine de centre ***C***, de rayon ***R***, de masse ***M***, de centre d'inertie ***G*** est animée d'un mouvement plan par rapport au repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Elle est en contact avec le sol lisse en ***A*** et le mur lisse au point ***B***. Elle glisse sans frottement sur les deux points.

Le tenseur d'inertie de la demi sphère pleine en son centre ***C*** dans le repère $R_1(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est donné par : $I_{C/R_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$ avec $A = \frac{2}{5}MR^2$ et $\boldsymbol{CG = a}$

1. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue du points ***G*** dans R_0 et R_1 ;
2. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation ***(CIR)*** de la demi sphère ;
3. Calculer les réactions N_A et N_B en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en utilisant le théorème de la résultante dynamique ;
4. En utilisant le théorème du moment dynamique trouver l'équation différentielle de mouvement de la demi sphère;
5. En intégrant l'équation de mouvement et en prenant les conditions : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, montrer que l'on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{2Mga}{A}\sin\theta$;
6. Retrouver l'expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale ;
7. En déduire les expressions des réactions R_A , R_B et de l'angle limite θ_l pour lequel la demi sphère pleine quitte le mûr.





Solution :

1. Vitesse et accélération absolue du points *G* dans R_0 et R_1 ;

A partir du vecteur position du point G nous déduisons la vitesse et l'accélération :

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \underset{R_0}{\begin{cases} R \\ R+ \\ 0 \end{cases}} \underset{R_0}{\begin{cases} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta = \\ 0 \end{cases}} \underset{R_0}{\begin{cases} R - a\cos\theta \\ R - a\sin\theta \\ 0 \end{cases}}$, $\overrightarrow{CG} = \underset{R_1}{\begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$

$\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

Dans le repère R_0 ***:***

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} a\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{\theta}a\cos\theta \\ 0 \end{cases}} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} a\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\ -a\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ 0 \end{cases}}$$

Dans le repère R_1 ***:***

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{CG}}{dt} = \frac{d^1\overrightarrow{CG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CG} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0\wedge \\ \dot{\theta} \end{cases}} \underset{R_1}{\begin{cases} -a \\ 0 = \\ 0 \end{cases}} \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}} \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0\wedge \\ \dot{\theta} \end{cases}} \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -a\dot{\theta} = \\ 0 \end{cases}} \underset{R_1}{\begin{cases} a\dot{\theta}^2 \\ -a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

2. Coordonnées du centre instantané de rotation *(CIR)* de la demi sphère ;

Nous pouvons le déterminer de deux façons : l'une graphique et l'autre analytique.

Méthode graphique : Les directions des vitesses des deux points ***A*** et ***B*** du solide sont connues, on trace les perpendiculaires à celles-ci au même point, leur intersection est le centre instantané de rotation. Les deux normales se rencontrent au point C, alors celui-ci est confondu avec le centre instantané de rotation $(I \equiv C)$.

Méthode analytique : La Vitesse du centre instantané de rotation est nulle : soit (x_I, y_I) les coordonnés du C.I.R. dans le repère R_0 , nous pouvons aussi écrire :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{GI} = \vec{0} \Leftrightarrow \underset{R_0}{\begin{cases} a\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{\theta}a\cos\theta \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0\wedge \\ \dot{\theta} \end{cases}} \underset{R_0}{\begin{cases} x_I - R + a\cos\theta \\ y_I - R + a\sin\theta = \\ 0 \end{cases}} \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

$$a\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}(y_I - R + a\sin\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}(y_I - R) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_I = R$$

$$-\dot{\theta}\,a\cos\theta + \dot{\theta}(x_I - R + a\cos\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}(x_I - R) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_I = R$$

On voit bien que le C.I.R. est confondu avec le centre C de la demi sphère.

3. Réactions R_A et R_B en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par le théorème de la résultante dynamique

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + m\vec{g} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

Projetons l'équation **(1)** sur les axes du repère R_0

$$R_B = ma\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_A - mg = -ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \quad \Leftrightarrow \quad R_A = mg - ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \qquad \textbf{(3)}$$

4. Equation différentielle de mouvement de la demi sphère en utilisant le théorème du moment dynamique

Le moment résultant des forces extérieures est égal au moment dynamique du solide au même point ***C***.

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_{ext})/_C = \vec{\delta}_C(S/R_0) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CA}\wedge\vec{R}_A + \overrightarrow{CB}\wedge\vec{R}_B + \overrightarrow{CG}\wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique :

$$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \frac{d^0\vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt}$$, le moment cinétique au point ***C*** est donné par :

$$\vec{\sigma}_C(S/R_0) = I_{C/R_1}.\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = A\dot{\theta}\vec{z}_0 = A\dot{\theta}\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0, R_1}$$

$$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \frac{d^0\,\vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt} = A\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{CA}\wedge\vec{R}_A + \overrightarrow{CB}\wedge\vec{R}_B + \overrightarrow{CG}\wedge m\,\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$$ comme : $\overrightarrow{CA}\,//\,\vec{R}_A$ et $\overrightarrow{CB}\,//\,\vec{R}_B$ alors :

$$\overrightarrow{CG}\wedge m\,\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ \; \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0}$$ d'où : $mga\cos\theta = A\ddot{\theta}$

ce qui donne : $\ddot{\theta} = \dfrac{mga}{A}\cos\theta$ **(4)**

5. Equation de mouvement avec les conditions : $\theta(0)=0$ et $\dot{\theta}(0)=0$;

On multiplie l'équation (4) par : $\dot{\theta}$, puis on intègre

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{mga}{A}\dot{\theta}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A}\,d(\sin\theta)$$

$$\int_0^{\theta} d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A}\int_0^{\theta} d(\sin\theta) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{mga}{A}\sin\theta$$ on déduit alors :

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{mga}{A}\sin\theta \qquad \textbf{(5)}$$

6. Expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale :

$$E_C + E_P = E_{C0} + E_{P0} = Cte \quad\Rightarrow\quad E_C - E_{C0} = -(E_P - E_{P0})$$

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^0 . I_{C/R_1} . \vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \quad ; \quad E_{C0} = 0$$

$$-(E_P - E_{P0}) = \int_0^{\theta} m\,\vec{g} \bullet d\,\overrightarrow{OG} = m\int_0^{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a\sin\theta d\theta \\ -a\cos\theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^{\theta} mga\cos\theta d\theta = mga\sin\theta$$

$$E_C - E_{C0} = -(E_P - E_{P0}) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 = mga\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\theta}^2 = 2\frac{mga}{A}\sin\theta$$

On retrouve ainsi l'expression de $\dot{\theta}^2$.

7. Expressions des réactions N_A , N_B et de l'angle limite θ_l pour lequel la demi sphère pleine quitte le mur.

Il suffit de remplacer les expression de $\dot{\theta}$ et de $\ddot{\theta}$ dans celles de R_A et R_B :

$$R_B = ma\left(\frac{mga}{A}\cos\theta\sin\theta + 2\frac{mga}{A}\sin\theta\cos\theta\right) = 3\frac{m^2ga^2}{A}\sin\theta\cos\theta$$

$$R_A = mg - ma\left(\frac{mga}{A}\cos\theta\cos\theta + 2\frac{mga}{A}\sin\theta\sin\theta\right) = mg - \frac{m^2ga^2}{A}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$R_A = mg - \frac{m^2ga^2}{A}\cos 2\theta$$

La demi sphère quitte le mur si : $R_B = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\theta\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\theta = 0\\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{\pi}{2}$